# ÜBER DIE INTEGRATION DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG DRITTER ORDNUNG IN GESCHLOSSENER FORM

Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите
од Н Р Македонија, кн. VII, 1956, 17-19

**1.** Die lineare Differentialgleichung[1])

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0, \tag{1}$$

$$a_i = a_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ 3,$$

wird, wie bekannt, mittels der Substitution

$$y = z \exp\left(-\frac{1}{3}\int a_1\, dx\right),$$

in die Gleichung

$$z''' + Rz' + Qz = 0 \tag{2}$$

übergeführt, worin

$$R = a_2 - a_1' - \frac{a_1^2}{3},$$

$$Q = a_3 + \frac{2}{27}a_1^3 - \frac{a_1 a_2}{3} - \frac{a_1''}{3}$$

ist.

**2.** Integriert man die Differentialgleichung (2) als ob die linke Seite ein vollständiger Differentialquotient wäre, bekommt man

$$z'' + Rz + \int z\,(Q - R')\,dx = C_1, \quad C_1 = \text{const.}$$

Wir können die Größen Q und $R$ so wehlen, daß

$$Q = R'$$

wird.

So erhält man ein erstes Integral der ursprünglichen Differentialgleichung (2) in der Form

$$z'' + Rz = C_1. \tag{3}$$

Ist

$$R = -a_1' - a_1^2,$$

so ist $y = \exp\int a_1\, dx$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung (3) ohne der rechten Seite.

Für die Funktionen $a_2$ und $a_3$ folgt dann

---

[1]) Hier ist vorauszusetzen, daß die vorkommenden Ableitungen existieren.

$$a_2 = -\frac{2}{3} a_1^2,$$

$$a_3 = -\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9} a_1^3 + 3 a_1 a_1' + a_1''\right),$$

und die Lösung der Differentialgleichung (1) ist daher

$$y = E^{2/3} \left\{ C_3 + C_2 \int E^{-2} dx + C_1 \int E\, dx \cdot \int E^{-2} dx - C_1 \int E \int E^{-2} dx^2 \right\},$$

$$E = \exp \int a_1 dx, \quad C_i = \text{Const.}, \quad i = 1, 2, 3.$$

3. Ist $Q = 0$, d. h.

$$a_3 = \frac{1}{3} (a_1 a_2 + a_1'') - \frac{2}{27} a_1^3,$$

so haben wir

$$v'' + Rv = 0, \quad v = z'.$$

Dann ist der Koefficient $R$ entweder

$$R = -(a_1^2 + a_1')$$

oder

$$R = -\left(a_1 + \frac{a_1'}{a_1}\right)' - \left(a_1 + \frac{a_1'}{a_1}\right)^2.$$

Es folgt für die Differentialgleichung

$$y''' + a_1 y'' - \frac{2}{3} a_1^2 y' + \left(\frac{1}{3} a_1'' - \frac{8}{27} a_1^3\right) y = 0$$

das vollständige Integral

$$y = E^{-1/3} \left\{ C_1 + C_2 \int E\, dx + C_3 \int E \int E^{-2} dx^2 \right\},$$

und für die Differentialgleichung

$$y''' + a_1 y'' - \left(\frac{2}{3} a_1^2 + 2 a_1' + \frac{a_1''}{a_1}\right) y' - \left(\frac{2}{3} a_1 a_1' + \frac{8}{28} a_1^3\right) y = 0,$$

das Integral

$$y = E^{-1/3} \left\{ C_1 + C_2 \int a_1 E\, dx + C_3 \int a_1 E \int a_1^{-2} E^{-2} dx^2 \right\}.$$


*Резиме*

## ЗА ИНТЕГРАЦИЈАТА НА ЛИНЕАРНАТА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ТРЕТ РЕД

Во трудот се даваат некои случаи на интеграбланост на линеарната диференцијална равенка од трет ред