О ВРЕДНОСТИ НЕКИХ КОНАЧНИХ СУМА

Б. БАЈШАНСКИ и Р. БОЈАНИЋ

У овоме раду даћемо једноставне доказе следећих образаца

$$(1)\qquad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\,\frac{(2n+2k+1)!!}{(2n+2k)!!}\,\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!} = \frac{n(2n+1)}{4},$$

$$(2)\qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2\,\frac{(2n+2k-1)!!}{(2n+2k)!!}\,\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!} = \frac{n(2n+1)}{8},$$

где је $(2k)!! = 2.\,4 \ldots (2k)$, $(2k+1)!! = 1.\,3 \ldots (2k+1)$. За ове обрасце Е. Л. Блох [1, стр. 717 и 720] наводи да су тачни за $n = 1, 2, 3, 4, 5$ и на основу тога претпоставља да важе за свако n.

Доказ обрасца (1) Сменом $k \mid n-1-k$ добијамо

$$2a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\,\frac{(4n-2k-1)!!}{(4n-2k-2)!!},$$

тј.

$$(3)\qquad 2a_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{2n-1-k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1} A_k A_{2n-1-k},$$

где смо краткоће ради ставили $A_k = (2k+1)!!/(2k)!!$.

Нека је

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = (1-x)^{-3/2}.$$

Сума $\sum_{k=0}^{2n-1} A_k A_{2n-1-k}$ очевидно је коефицијент уз x^{2n-1} функције

$$f^2(x) = (1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,x^n,$$

тј.

$$\sum_{k=0}^{2n-1} A_k A_{2n-1-k} = n(2n+1),$$

па је према (3)

$$a_n = \frac{n(2n+1)}{4}.$$

Доказ обрасца (2). На исти начин као и у претходном случају сменом $k|n-k$ добијамо

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{(4n-2k-1)!!}{(4n-2k)!!}.$$

Ако опет једноставности ради ставимо $B_k = (2k-1)!!/(2k)!!$ биће

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 B_k B_{2n-k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} (n-k)^2 B_k B_{2n-k}$$

тј.

$$b_n = \frac{n^2}{2} \sum_{k=0}^{2n} B_k B_{2n-k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} k B_k (2n-k) B_{2n-k}. \tag{4}$$

Нека је

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k = (1-x)^{-1/2}.$$

Тада је

$$x g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k B_k x^k = \frac{x}{2} (1-x)^{-3/2}.$$

Суме на десној страни обрасца (4) су очевидно коефицијенти уз x^{2n} функције

$$g^2(x) = (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

односно

$$\{x g'(x)\}^2 = \frac{x^2}{4} (1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{8} x^n,$$

тј.

$$\sum_{k=0}^{2n} B_k B_{2n-k} = 1, \quad \sum_{k=0}^{2n} k B_k (2n-k) B_{2n-k} = \frac{n(2n-1)}{4}.$$

Према томе је

$$b_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n(2n-1)}{8} = \frac{n(2n+1)}{8}.$$

Напоменимо на крају да се много општији обрасци ове врсте могу добити посматрањем функција генератриса Лежандрових и Гегенбауерових полинома.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Л. Блох, горизонтальный удар эллипсоида вращеиия об идеальную жидкость при наличии свободной поверхности. Прикладная математика и механика, Том XVII, 705—726 (1953).

B. Bajšanski and R. Bojanić

ON TWO SUMS

(Summary)

Simple proofs of the formulae

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\,\frac{(2n+2k+1)!!}{(2n+2k)!!}\,\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!} = \frac{n(2n+1)}{4},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\,\frac{(2n+2k-1)!!}{(2n+2k)!!}\,\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!} = \frac{n(2n+1)}{8},$$

where $(2k)!!=2.4\ldots(2k)$, $(2k+1)!!=1.3\ldots(2k+1)$, are given. These formulae appear in a paper of E. L. Bloh [1, p 717, resp. 720]. He verified them for $n=1, 2, 3, 4, 5$ and when $n\to\infty$ and supposed therefore that they are true for every integral n. But a rigurous proof of these assertions he could not find.

It may be observed that more general formulae of the same kind may be obtained by considering the generating functions of Legendre or Gegenbauer's polynomials.
