QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите
од Н Р Македонија, кн. 4, 1953. 20-24

I.

Soit donnée une fonction

$$w = u(x, y) + i\, v(x, y) \tag{1}$$

de la variable complexe $z = x + iy$. Considérons deux plans rapportés aux coordonnées rectangulaires (x, y) et (u, v). On établit, comme on sait, une correspondance entre les points de ces plans, soit

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Soient c_1 et c_2 deux courbes correspondantes. Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe c_2 est donnée par

$$\frac{dv}{du} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}},$$

où $\dfrac{dy}{dx}$ est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe correspondante c_1. En désignant les coefficients angulaires dans deux points correspondants fixés (x_1, y_1) et (u_1, v_1) par $tg\,\alpha$ et $tg\,\beta$ respectivement, on a

$$tg\,\beta = \frac{v_x + v_y\, tg\,\alpha}{u_x + u_y\, tg\,\alpha} \tag{2}$$

avec

$$v_x = \frac{\partial v(x_1, y_1)}{\partial x}, \ldots$$

Nous considérons les cas suivants:

1°. Si la fonction w est analytique, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

On trouve de (2)

$$tg\,\beta = tg(\alpha + \omega), \quad tg\,\omega = -\frac{u_y(x_1, y_1)}{u_x(x_1, y_1)},$$

d'où[1])

$$\beta = \alpha + \omega. \tag{4}$$

Par une voie analogue, on trouve

$$\beta_1 = \alpha_1 + \omega. \tag{5}$$

Les lettres β_1 et α_1 désignent les angles qui font les directions correspondantes des tangentes à deux courbes c_2' et c_1', qui passent par le même point (x_1, y_1) c'est-à-dire (u_1, v_1).

Les relation (4) et (5) expriment le résultat bien connu: *la transformation par une fonction analytique conserve les angles.*

2°. Si la fonction w est de la forme

$$w = u(x) + iv(y) \tag{6}$$

---

[1]) L'argument ω a une multiple de 2π, determiné d'après $\sin\beta$ et $\cos\beta$ mais nous la laissons.

on a, d'après la formule (2)

$$tg\,\beta = k\,tg\,\alpha, \text{ avec } k = \frac{v_y(y_1)}{u_x(x_1)},$$

et de même

$$tg\,\beta_1 = k\,tg\,\alpha_1.$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat: *la transformation par une fonction de la forme $w = u(x) + iv(y)$ conserve le quotient des coefficients angulaires des tangentes à deux courbes passant par le même point.*

3°. Si la fonction w est de la forme[1])

$$w = A(x) + i\,[yA'(x) + B(x)] \tag{7}$$

on obtient de (2)

$$tg\,\beta - tg\,\alpha = \overline{k}$$

avec

$$\overline{k} = \frac{y_1 A''(x_1) + B'(x_1)}{A'(x_1)}.$$

On a de même

$$tg\,\beta_1 - tg\,\alpha_1 = \overline{k}$$

et par conséquent le résultat: *la transformation par une fonction de la forme $w = A(x) + i\,[yA'(x) + B(x)]$ a la propriété de conserver la différance des cofficients angulaires des tangentes à deux courbes passant par le même point.*

II.

Les fonctions (6) et (7) ne sont pas choisies par hasard. Ce sont des fonctions qui possèdent plusieurs propriétés analogues à celles des fonctions analytiques. Voici une interprétation géométrique.

Il est connu que les conditions (3) de Cauchy, pour qu'une fonction (1) soit analytique, peuvent être représentées par une équation vectorielle[2])

$$\nabla v = \left[[\vec{e}_1\, \vec{e}_2]\ \nabla u \right]. \tag{8}$$

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ sont les vecteurs-unités orthogonaux dans le plan de la fonction, les crochets expriment le produit vectoriel et $\nabla u = \text{grad}\,u$

Les vecteurs ∇u et ∇v sont dans ce cas: *orthogonaux, de même intensité, de sens déterminé.*

Si l'équation (8) n'est pas satisfaite, la fonction (1) sera non analytique et on peut introduire le vecteur

$$\vec{B} = \nabla v - \left[[\vec{e}_1\, \vec{e}_2]\ \nabla u \right],$$

qui représente, d'après Bilimovitch, la mésure vectorielle de déflexion (d'„analycité") de la fonction non analytique au point considéré.

En décomposant ce vecteur $\vec{B}$ en deux composantes $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$, suivant la direction de ∇u et perpendiculaire à celle-ci, on a

1) Les primes denotes les dérivées prises par raport à x.

2) A. Bilimovitch, *Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique par raport à une fonction analitique,* Comtes rendus, 237, 1953, p. 694.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

ou

$$\vec{B} = \frac{\nabla u\,(\nabla u\,\vec{B})}{(\nabla u)^2} + \frac{[\nabla u\,[\vec{B}\,\nabla u]]}{(\nabla u)^2}.$$

Si l'on pose $\vec{B}_1 = 0$, on trouve, à cause de $\nabla u \neq 0$,

$$(\nabla u,\, \vec{B}) = (\nabla u,\, \nabla v) - (\nabla u\, [[e_1\, e_2]\, \nabla u])$$

$$= (\nabla u,\, \nabla v)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

D'ici il résulte que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

ce qui répresente les conditions satisfaites par une fonction non analytique de la forme (6). Les vecteurs ∇u et ∇v sont: ***orthogonaux, de différentes intensités, de sens déterminé.***

En supposant $\vec{B}_2 = 0$, l'on a

$$[\nabla u\,[\vec{B}\,\nabla u]] = \vec{B}\,(\nabla u)^2 - \nabla u\,(\nabla u,\, \vec{B})$$

$$= (\nabla u)^2\, \nabla v - (\nabla u)^2 \left[[\vec{e}_1\, \vec{e}_2]\, \nabla u\right] - \nabla u\,(\nabla u,\, \nabla v) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

On en tire des conditions

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

satisfaites par une fonction non analytique de la forme (7). Les vecteurs ∇u et $\vec{B}$, dans ce cas, sont: *parallèls, de différentes intensités, de sens déterminé.*

НЕКОИ ОСОБИНИ НА ФУНКЦИИТЕ ОД ЕДНА КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА

(Резимé)

Во теоријата на функциите од една комплексна променлива добро е познат следниот резултат: *пресликувањето со помошта на една аналитична функција ја има особината да ги запазува аглите.*

Во оваа работа покажуваме како може да се добие овој резултат по еден начин што го сметаме попрост од познатите, како и прибавуваме следните особини за некои класи функции од една комплексна променлива:

1° *При пресликувањето со помошта на функции од обликот*

$$f(z) = P(x) + i\ Q(y) \quad z = x + iy$$

односот меѓу коефициентите на правците на соодветните тангенти е величина постојана.

2° *Пресликувањето со памошта на функции од обликот*

$$f(z) = A(x) + i\ [y\,A'(x) + B(x)]$$

ја има особината да ја запазува разликата меѓу агловите коефициенти на тангентите од две криви што се сечат во иста точка.