A PROPOSITO DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL SECONDO ORDINE

Nota di
LUIGI CONTE
a Torino

1. L'equazione differenziale[1])

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\lambda\frac{a'}{a}\frac{dy}{dx}+\left(\lambda\frac{a'^2}{a^2}-\frac{a''}{a}\right)y=0, \quad (\lambda = \text{costante},\ a=a(x)), \tag{1}$$

ammette evidentemente l'integral particolare $a(x)$, ed il suo integrale generale è:

$$y=a(x)\left\{C_2+C_1\int[a(x)]^{\lambda-2}dx\right\}, \quad (C_1,\ C_2 \text{ costanti arbitrarie}). \tag{2}$$

In particolare, per $\lambda=2$,

$$y=a(x)(C_2+C_1x). \tag{2'}$$

La (1) nell'ipòtesi $\lambda=3$ era stata integrata da Milankovitch,[2]) al quale s'era presentata in un lavoro di fisica matematica, per

$$a(x)=k_1e^{k_2x}, \quad (k_1,\ k_2 \text{ costanti arbitrarie}),$$

ed in seguito, sempre per $\lambda=3$ ed $a(x)$ qualunque da Mitrinovitch.[3])

Inoltre, posto

$$\lambda=-1/k, \quad d\log a/dx=k f(x), \tag{3}$$

la (2) diventa l'integral generale dell'equazione differenziale

---

1) Qui e nel seguito, gli apici indicano derivazione rispetto ad x.

2) *Annalen der Physik*, Bd. 43, 1914, S. 623—638.

3) *Annuaire de la Faculté de philosophie de l'Université de Skopje*, section des sciences naturelles, t. 2, 1949, p. 189—193.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}-k[(k+1)f^2(x)+f'(x)]y=0, \tag{4}$$

già integrata da Görtler.[4]

2. Tutti i risultati precedenti si possono considerare come casi particolari d'un risultato generale dovuto a Mitrinovitch,[5] risultato generale che è pure esprimibile con la seguente proposizione:

L'equazione differenziale

$$y''+A(x)y'+B(x)y=0 \tag{5}$$

nella quale i cofficienti A *e* B *sono o si possono mettere nella forma*

$$\begin{aligned} A(x) &= -\lambda\frac{d}{dx}\log a(x), \\ B(x) &= -\frac{d^2}{dx^2}\log a(x)+(\lambda-1)\left[\frac{d}{dx}\log a(x)\right]^2, \end{aligned} \tag{6}$$

con λ *costante qualunque, ammette l'integral particolare*

$$a(x)=\exp\left[-\frac{1}{\lambda}\int A(x)\,dx\right], \tag{7}$$

e quello generale

$$y=\exp\left[-\frac{1}{\lambda}\int A(x)\,dx\right]\left\{C_2+C_1\int\exp\left[\frac{2-\lambda}{\lambda}\int A(x)\,dx\right]dx\right\}. \tag{8}$$

Infatti, colla sostituzione

$$y=a(x)z(x), \tag{*}$$

la (5) si trasforma nell'altra

$$az''+(2a'+aA)z'+(a''+Aa'+Ba)z=0. \tag{5'}$$

---

[4]) *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 22, 1942, S. 233.

[5]) *Annuaire de la Faculté de philosophie de l'Université de Skopje*, section des sciences naturelles, t. 2, 1949 p. 209-246.

Se scegliamo la funzione $a(x)$ in guiza che siano verificate le (6), la seconda delle quali esprime che $a(x)$ è integral particolare della (5), la stessa (5') si riduce all'altra

$$\frac{d}{dx}\log\frac{z'(x)}{[a(x)]^{\lambda-2}}=0, \tag{9}$$

dalla quale, tenendo presente la (*), segue la (8). Si noti che le equazioni (1) e (4) soddisfano la (6), e che la seconda delle (6) si può pure scrivere

$$B=\frac{A'}{\lambda}+\frac{\lambda-1}{\lambda^2}A^2. \tag{10}$$

3. In maniera analoga a quello del § precedente, si dimostra che:

L'equazione differenziale

$$y'''+A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=0, \tag{11}$$

i cui coefficienti sono o si possono mettere sotto la forma

$$A(x)=-\lambda\frac{a'}{a};\quad B(x)=2\lambda\left(\frac{a'}{a}\right)^2-3\frac{a''}{a};$$
$$C(x)=-2\lambda\left(\frac{a'}{a}\right)^3+(\lambda+3)\frac{a'}{a}\,\frac{a''}{a}-\frac{a'''}{a}, \tag{12}$$

con λ costante qualunque, ammette l'integral particolare (7) e quello generale

$$y=a(x)\left[C_3+C_2x+C_1\int\left(\int a^{\lambda-3}\,dx\right)dx\right], \tag{13}$$

(C_1, C_2, C_3 costanti arbitrarie).

In particolare per $\lambda=3$ l'integral generale è

$$y=a(x)\left(C_3+C_2x+C_1\frac{x^2}{2}\right). \tag{13'}$$

Le (12) si possono scrivere anche

$$A=-\lambda\frac{a'}{a};\quad B=\frac{2\lambda-3}{\lambda^2}A^2+\frac{3}{\lambda}A';$$
$$C=\frac{\lambda-2}{\lambda^3}A^3+\frac{AA'+A''}{\lambda}. \tag{12'}$$

З А Д А Ч И — P R O B L E M E S

Задачите се поделени во две групи. Групата задачи, обележени со ѕвездичка, е за студенти, наставници и други, а останатите се и за ученици - средношколци.

Во идните броеви ќе ги соопштуваме решенијата на задачите, заедно со имињата на оние што ќе испратат до Редакцијата правилни решенија.

Ги молиме читателите за соработка во оваа рубрика како со решување на задачи така и со поставување на нови оригинални задачи.

Les solutions des problèmes dont l'énoncé est écrit en français seront aussi publiées en cette langue et accompagnées des noms de ceux qui ont adressé à la Rédaction les solutions exactes.

1. Правоаголникот $ABCD$ да се доведе само со една ротација околу една негова внатрешна точка во таков положај $A_1B_1C_1D_1$ да биде $A_1B_1 \perp AB$, и да се средината на A_1B_1 совпадне со пресекот на дијагоналите од $ABCD$.

(П. Д.)

2. Во една рамнина се дадени четири точки во произволно положение. Колку такви правилни $2n$-аголници постоат во таа рамнина, а да тие точки лежат на два пара од неговите спротивни страни? Изврши конструкција за случај $n=3$.

(Ј. У.)

3. а) Дадени се должините на дијагоналите и аголот меѓу нив кај некој трапезоид. Да се конструираат должините на средните линии и аголот меѓу нив.

б) Дадени се должините на средни линии на еден трапезоид и аголот меѓу нив. Да се конструираат должините на дијагоналите и аголот меѓу нив.

(Ј. У.)

4. a, b, c се три паралелни прави од една рамнина; d и e се другн две паралелни прави што правите од првата група ги сечат под агол од 60°. Нормалното растојание на правите d и e еднакво е на нормалното растојание од кои да е две прави од првата група. — Да се докаже оти страната на рамностраниот триаголник што темињата му лежат на правите a, b, c е еднаква на едната од дијагоналите на паралелограмот што го заградуваат овие прави.

(М. П.)

5*. Означувајќи ја со D_n детерминантата

$$D_n = |a_{ik}|; \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

каде што се

$$a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{за } k = i \pm s, \; s > 1 \\ 1 & \text{за } k = i + 1 \end{cases} \qquad a_{ik} = \begin{cases} a & \text{за } i = k \\ 2i - 2 & \text{за } k = i - 1 \end{cases}$$

да се докажат идентитетите

1° $$D_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{k!} \frac{a^{n-2k}}{(n-2k)!}.$$

2° $$D_n^2 = 2^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{D_{2k}}{2^k k!}.$$

Да се напише обликот на вториот член на 1° ако ги во D_n смениме елементите a_{ik} за $k = i - 1$ со

$$a_{ik} = i - 1.$$

(Б. Попов)

6*. Краците на два агли во рамнина градат еден четириаголник чии што внатрешни аглови се $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Да се покаже дека вредноста на детерминантата

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\delta \end{vmatrix}$$

не зависи од взаемниот положај на двата дадени агли.

(Ј. Улчар)

7*. Ако од две слични и слично положени елипси едната се движи транслаторно така да периферијата ѝ клизи по центарот на другата, тогаш оној дел на рамнината што им е заеднички на двете елипси има константна површина.

(J. Улчар)

8*. Да се докаже дека важи

$$2\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\cos i\,\frac{2\pi}{n}=n.$$

(J. Улчар)

9. Штица долга $85\,cm$ е наклонета спрема хоризонталата под агол од 20^0. Некое тело ставено на неа се лизга по неа, а за да ја помине му треба 2 сек. Да се определи коефициентот на триенето.

(J. M.)

10. Две топчиња од материјал што спроводи елекрицитет, со маса $m=0{,}5\,g$, обесени се една до друга на два тенки конци од изолатор на кој што му е должината $8\,cm$. Масата на конците е занемарлива. Со колкаво количество од истоимени електрицитет треба да се набијат топчињата, за да се од одбојната сила оддалечат така, да аголот помеѓу конците биде прав.

(J. M.)

11*. Покажи дека за сумата

$$\sum\nolimits_i^n = a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{ik}+\cdots+a_{in},$$

каде што секој суманд a_{ik} е равен на збирот од првите k суманди од $\sum\nolimits_{i-1}^n$ за $i=1,2,3,\ldots$, и

$$\sum\nolimits_1^n = 1+2+3+\cdots+n,$$

важи

$$\sum\nolimits_i^n = \binom{n+i}{i+1}.$$

(J. Улчар)

12* Да се најде општото решение на Laplace-овата равенка

$$L \equiv xy''' - 6y'' + xy = 0, \qquad (y = y(x)),$$

со помошта на равенките што се добиваат со диференцирање на диференцијалниот полином L.

(Д. Митриновиќ)

13* Да се докаже

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n-k+2}{k} = \left[\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k}\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} \binom{n-k+1}{k}\right]^2.$$

(Б. Попов)

14* p_1 и p_2 се два произволни прости броеви, а $\lambda(p_1, p_2, x)$ е број за сите природни броеви од форма

$$p_1^{s_1}\, p_2^{s_2} \leqslant x,$$

каде што x е еден позитивен број.— Да се докажаат формулите

$$(1) \qquad \lambda(p_1, p_2, x) = \sum_{s_1=0}^{r_1} (r_2 + 1),$$

$$r_1 = \left[\frac{\log x}{\log p_1}\right], \quad r_2 = \left[\frac{\log x}{\log p_2} - s_1 \frac{\log p_1}{\log p_2}\right];$$

$$(2) \qquad \lambda(p_1, p_2, x) = \frac{\log^2 x}{2 \log p_1 \log p_2} + O(\log x), \quad x \to \infty.$$

Soient p_1 et p_2 deux nombres primes quelconques. Désignons par $\lambda(p_1, p_2, x)$ le nombre de tous nombres naturels de la forme

$$p_1^{s_1}\, p_2^{s_2} \leqslant x,$$

où x est un nombre positif. — Démontrer les formules (1) et (2).

(M. Popadić)